

- ملاحظة:**
- ليكن $(E, \|\cdot\|_E)$ و $(F, \|\cdot\|_F)$ فضاءين متجهيين و T تطبيق خطي من E إلى F
- الشروط التالية متكافئة:
- 1 التطبيق T مترابط نظام.
 - 2 التطبيق T مستمر على E .
 - 3 التطبيق T مستمر في النقطة 0.
 - 4 التطبيق T محدود على الكرة المفتوحة $B(0,1)$ من E .
 - 5 يوجد عدد حقيقته موجب M بحيث يكون $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ وذلك إذا كان x من E .

البرهان:

1 \Leftrightarrow 2 واضح

2 \Leftrightarrow 3 واضح

3 \Leftrightarrow 4

لنفرض أن تطبيق T مستمر في النقطة 0 أي أن نظاير $T(x) = T(0) = 0$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} T(x) = T(0) = 0$ فإن

فيما يلي كل العدد الحقيقي موجب $\epsilon = 1$ عدد حقيقته موجب δ بحيث إذا كان $u \in E$ فإن $\|u\|_E < \delta$ فإن $\|T(u)\|_F < 1$ وإذا كان x عنصراً من $B(0,1)$ فإن $\|T(x)\|_F < 1$

$\|T(u)\|_F = \|T(u) - T(0)\|_F = \|T(u - 0)\|_F$ $\|u - 0\|_E = \|u\|_E$

$$\|x\|_E < 1 \text{ ومنه } \|Tx\|_F \leq \delta \|x\|_E = \delta \|x\|_F \text{ وبالمثل:}$$

$$\|T(\delta x)\|_F = \|\delta \cdot T(x)\|_F = \delta \cdot \|T(x)\|_F < 1$$

$$\|T(x)\|_F < \frac{1}{\delta} = M$$

يوجد عدد حقيقته موجب $M = \frac{1}{\delta}$ بحيث إذا كان x من الكرة المفتوحة $B(0,1)$ من E فإن $\|T(x)\|_F < \frac{1}{\delta} = M$ وهذا يعني أن التطبيق T محدود على الكرة $B(0,1)$

5 \Leftrightarrow 4 لنفرض أن التطبيق T محدود على الكرة $B(0,1)$ من E أي أنه يوجد عدد حقيقته موجب M بحيث إذا كان x عنصراً من $B(0,1)$ من E فإن

$$\|T(y)\|_F \leq M$$

وإذا كان x عنصراً مألفاً بحيث $x \neq 0$ دو صفناً $y = \frac{x}{2\|x\|_E}$ فإننا نجد أن

$$= \frac{1}{2\|x\|_E} \cdot \|x\|_E = \frac{1}{2} < 1$$

(أي لا ضئ الكثر (3(0,1)

$$\|T(y)\|_F = \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|_E}\right) \right\|_F = \left\| \frac{1}{2\|x\|_E} \cdot T(x) \right\|_F$$

$$= \frac{1}{2\|x\|_E} \cdot \|T(x)\|_F \leq M \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq 2M \cdot \|x\|_E$$

بوضع $k=2M$ نجد $\|T(x)\|_F \leq k\|x\|_E$

1.1

لنقرض أنه يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $\|T(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ لكل x من E .
عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ بحيث أنه إذا كان x, y عنصريين من E يحققان $\|x - y\|_E < \delta$ فإن

$$\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq k\|x - y\|_E \leq k \cdot \delta = \epsilon$$

أي أن T مستمر منتظام.

مبرهنة:

إذا كان E فضاءاً متجهياً حقيقياً ذا بعد منتهى، فإن أي تطبيق خطي T من E إلى فضاء متجهي حقيقي منظم (F, N) يكون مستمراً.

البرهان:

لكن أي e_1, e_2, \dots قاعدة لـ E ولنفرض على E النظم:

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ و } x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \rightarrow \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

عندئذ أياً كانت النقطتين $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ و $a = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$ من E فإننا نجد:

$$N(T(x) - T(a)) = N(T(x - a))$$

$$= N \left(T \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i) e_i \right) \right) = N \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot T(e_i) \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \cdot N(T(e_i)) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - a_i| \sum_{i=1}^n N(T(e_i))$$

$$= k \|x - a\|$$

$$k = \sum_{i=1}^n N(T(e_i))$$

ومن نستنتج أن T مستمر \Rightarrow لأنه من أجل أي عدد حقيقي موجب $\epsilon > 0$ يوجد عدد

حقيقي موجب $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ بحيث إذا كانت المسافة بين x و a أصغر من δ ، $\|x - a\| < \delta$

فإن المسافة بين صورتها $N(T(x) - T(a)) = N(T(x - a))$ ~~$\leq k \|x - a\|$~~

k

$$\leq k \|x - a\| < k \cdot \delta = \epsilon$$

ملاحظات:

1. نقول عن التطبيق الخطي T للفضاء المنتظم E في الفضاء المنتظم F أنه محدود إذا وجد

عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $\|T(x)\|_F \leq k \|x\|_E, \forall x \in E$

ونستنتج من البرهان السابق (تكافؤ بين 2 و 5) أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التطبيق الخطي محدود هو أن يكون مستمراً.

5. إذا رمزنا بـ $L(E, F)$ لمجموعة التطبيقات الخطية المستمرة للفضاء المتجهي الحقيقي E في الفضاء المتجهي الحقيقي F ، وذررنا هذه المجموعة بعملية جمع وتطبيق عدد حقيقي فإن $L(E, F)$ تصبح فضاء متجهياً حقيقياً.

نتيجة:

إذا كان $(E, \|\cdot\|_E)$ و $(F, \|\cdot\|_F)$ فضاءين متجهيين و T تطبيقاً خطياً مستمراً من E في F

أي $T \in L(E, F)$ فإننا نستنتج ما سطره من البرهان السابق (تكافؤ بين 2 و 5)

عمر \Rightarrow يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $\|T(x)\|_F \leq k \|x\|_E$

إن المجموعة $\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E - \{0\} \right\}$ محدودة، لنضع الآن من أجل أي تطبيقاً T من $L(E, F)$

$$\|T\| = \begin{cases} \sup \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} & ; E \neq \{0\} \\ 0 & ; E = \{0\} \end{cases}$$

لنثبت الآن أن الدالة :

$$L(E, F) \rightarrow \mathbb{R}_+ ; T \rightarrow \|T\|$$

1. واضح أن $\|T\| \geq 0$ ، وإذا كان صورة $\|T\| = 0$ فإنه يكون $\|T(x)\| = 0 \Rightarrow T(x) = 0$ وذلك $\forall x \in E$ ومنه $T = 0$ (أي التطبيق الصفري)

$$\| \lambda T \| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\| \lambda \cdot T(x) \|}{\|x\|} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|\lambda| \cdot \|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= |\lambda| \cdot \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot \|T\|$$

3. إذا كان T_1, T_2 عضوين من $L(E, F)$ فنحن نرى

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} = \|T_1\| + \|T_2\|$$

نتيجة:

إذا كان $(E, \|\cdot\|)$ و $(F, \|\cdot\|)$ فضاءين منظمين فإن الدالة :

$$L(E, F) \rightarrow \mathbb{R}_+ ; T \rightarrow \|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

تقرن على العضء $L(E, F)$ نظيماً بحقق

$$\|T\| \geq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

ومنه $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ وذلك أي كان T من $L(E, F)$ وأياً كانت x

مبرهنة:

إذا كانت E و F فضاءات متجهة و $H \in L(E, F)$, $T \in L(E, F)$ وكان

$$\|H \circ T\| \leq \|H\| \cdot \|T\|$$
 فنثبت:

البرهان:

إذا كانت $E = \{0\}$ فالمتراحة صحيحة.
 لنفرض الآن أن $E \neq \{0\}$ عندها:

$$\begin{aligned} \|H \circ T\| &= \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|H(Tx)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|H\| \cdot \|Tx\|}{\|x\|} \\ &= \|H\| \cdot \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &= \|H\| \cdot \|T\| \end{aligned}$$

ملاحظة: إذا النظم على $L(E, F)$ يمكن أن يعرف أيضاً بالشكل:

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| = 1 \}$$

تفاضل فريشة والدوال القابلة للمفاضلة والمستقات الزئج

سندرس في هذا الفصل قابلية المفاضلة حسب فريشة لدوال من الشكل $D \subseteq E$ و $f: D \rightarrow F$ حيث E و F فضاءان متجهيان و f دالة الدوال الحقيقية لعدة متغيرات أي على الحالة التي يكون فيها $E = \mathbb{R}^n$ و $F = \mathbb{R}$ وعلى الدوال المتجهة لعدة متغيرات أي عندما يكون $E = \mathbb{R}^n$ و $F = \mathbb{R}^m$.

تعريف: ليكن E و F فضاءين متجهيين حقيقيين متجهيين وليكن D مجموعة جزئية من E و f نقطة داخلية من D ؛ نقول عن الدالة $f(x) \rightarrow f(x)$ قابلية للمفاضلة في النقطة x إذا وجد تطبيق خطي مستمر $L: E \rightarrow F$ بحيث يكون:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_E} [f(a+h) - f(a) - L(h)] = 0 \quad (1)$$

ملاحظات:

1. إن المساواة (1) تكافئ المساواة:

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \|h\|_E \cdot \varepsilon(h) \quad (2)$$

حيث ε دالة صرورة على جوار a للنقطة a في E وتأخذ قيمتها في كوتبة الشوط:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

2. إذا كان f ذا بعد منته في F فإن أهم تطبيق خطي $L: E \rightarrow F$ يكون مستراً (ذلك حسب صرورة L بقة).

تعريف: إذا كانت الدالة $f: D \rightarrow F$ قابلية للمفاضلة في النقطة الداخلية a من D ؛ فإننا نقول عن التطبيق الخطي المستمر $L: E \rightarrow F$ والزم يحقق المساواة (2) أنه تفاضل (أو مستق) فريشة للدالة f في النقطة a ويرمز له f'_a . إذا كانت D مجموعة مفتوحة في E فإننا نقول عن الدالة $f: D \rightarrow F$ أنها قابلة للمفاضلة.

على D إذا كانت قابلة للمفاضلة في كل نقطة من D وعندئذ نرمز بـ f للدالة $x \mapsto f(x)$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ حيث $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ مضاء التطبيقات الخطية المقرة المعرنة على \mathbb{R} ، ونقول عن f أنه تفاضل مبرش (أو اختصاراً تفاضل f على D).

الامثلة الخاصة:

1. ان الدالة الحقيقية لعدة متغيرات: $f: D \rightarrow \mathbb{R}; x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x)$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$

تكون قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ من D إذا وفقط إذا وجدت أعداد حقيقية A_1, A_2, \dots, A_n بحيث يكون

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^n A_j \cdot h_j}{\|h\|} = 0$$

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^n A_j \cdot h_j + \|h\| \cdot \Sigma(h)$$

علماً أن $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ وأن Σ دالة حقيقية معرنة على \mathbb{R}^n حيث $\lim_{h \rightarrow 0} \Sigma(h) = 0$ من \mathbb{R}^n ديفرنت

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^n A_j \cdot h_j$$

وبشكل خاص إذا كانت $n=2$ فإن الدالة الحقيقية لمتغيرين

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto f(x, y) \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

تكون قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية (a, b) من D إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين A, B بحيث يكون

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

أو

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \Sigma(h, k)$$

حيث أن $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sum |h,k| = 0$

2- الدالة المتجهة بعدة متغيرات $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $D \subseteq \mathbb{R}^n$ تكون قابلة للمفاضلة عند النقطة الداخلية $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ إذا دققنا إذا وجدت أعداد حقيقية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0$ بحيث يكون $A = (a_{ij})$ من النوع $m \times n$ $1 \leq i \leq m$ $1 \leq j \leq n$

وعندئذ $f(a+h) = A \cdot h$ حيث A يمثل جداء المصفوفتين A بالمصفوفة المربعة f التي عناصرها مركبات f .

Scholar